

همانطور که در تمام گذشته استدلال در رابطه با بحث تابع صحت کردیم این تم مفصل تر در رابطه با این مفهوم و شرایط و خواص آن بررسی کنیم

مفهوم تابع یکی از مهمترین مفاهیم در ریاضیات است البته نه تنها در ریاضیات بلکه در بسیاری از علوم دیگر که با آنها در آن کار می‌رود نیز تابع نقش مهم و محوری دارد.

تعریف: بسیاری از مواقع در یک مجموعه A به تفریق و مفهوم تابع وقت کنیم که آن استفاده می‌کنیم برای مثال در کارنامه امتحان پارسا P نام و نام خانوادگی که هر دوی آن مشخص می‌شود.

در کارنامه پارسا P نام و نام خانوادگی که هر دوی آن مشخص می‌شود و عددی که در آن درج شده است اسم پدر و شماره هم غرضی که در آن درج شده است.

ممکن است در چندین مقام غرضی که یک کاره باشد یکی ممکن ندارد که برای یک نفر (در اینجا غرض متفاوت گرفته باشد). به عبارت دیگر در کارنامه هیچ دو زوج مرتب متفاوتی در کارنامه های اول برابر نمی‌باشد پس کارنامه P یک تابع است.

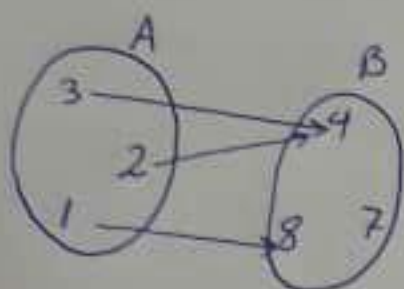
یک مثال دیگر: دایره را که با S نشان می‌دهیم یا r رادیوس آن و S سطح آن است. $S = \pi r^2$ رابطه بین r و S را می‌دهد. برای هر عدد مثبت r نتایج عدد حقیقی S به دست می‌آید. (این مثال) ممکن ندارد برای یک تابع. هر یک از اینها به یک r در این رابطه $S = \pi r^2$ یک تابع است. در واقع هر فرمولی که به ما یک تابع می‌دهد. هر یک از اینها به یک تابع است.

②

الفصل ①

تعریف تابع:

دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید. ضابطه یا معادله‌ای که هر یک از عناصر مجموعه A را فقط به یک عنصر مجموعه B نسبت دهد، یک تابع نامیده می‌شود.



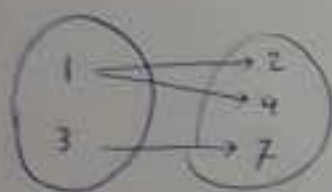
مثال ۱: مجموعه A یک تابع است.

$$A = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9)\}$$

مثال ۲: مجموعه B یک تابع نیست.

$$B = \{(1, 2), (3, 7), (1, 4)\}$$

چرا؟



مثال ۲: دو زوج مرتب $(1, 4)$ و $(1, 2)$ مؤلفه‌های اول یکسان دارند.

هر مؤلفه اول مجموعه A باید فقط به یک مؤلفه دوم تعلق داشته باشد.

تعریف دامنه و برد تابع:

فرض کنید تابع f را رسم کرده‌ایم. در موضوع و مقابل محور x به همراه x یک مجموعه داریم که به آن دامنه و برد تابع می‌گویند.

تعریف دامنه و برد تابع: x این طریقی رسم می‌کنیم که مجموعه عناصر اول زوج f را رسم می‌کنیم. دامنه و برد تابع را رسم می‌کنیم.

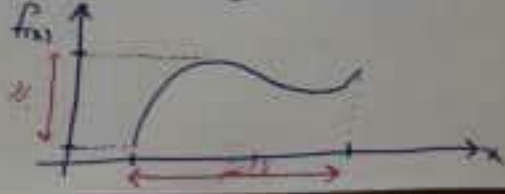
و آن را با D نشان می‌دهیم. همیشه مجموعه عناصر دوم زوج f را رسم می‌کنیم و آن را با R نشان می‌دهیم.

در واقع به سادگی می‌توانیم x را رسم کنیم. دامنه و برد تابع f را رسم می‌کنیم. تمام مقادیر x که در D قرار دارند و $f(x)$ در R قرار دارند.

در نمودار f یک تابع تعریف شده باشد. در هر تابع f مجموعه مقادیر x که در D قرار دارند و $f(x)$ در R قرار دارند.

در آن x را رسم می‌کنیم. اگر $f(x)$ در R قرار داشته باشد، $f(x)$ در R قرار دارد.

مجموعه x را D می‌نامیم. دامنه و برد تابع f را رسم می‌کنیم.



3

نکته 1

فناپذیر تابع: تابعی که هر عنصر از آن مجموعه (مجموعه مقادیر) به یک عنصر از مجموعه مقادیر نگاشته شده باشد.

دستگاه مرتبه دوم

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto f(x)$$

عبارت بالا را می‌توانیم

به عنوان مثال تابع زیر را در نظر بگیریم:

f تابعی است که هر عدد از مجموعه A به یک عدد از مجموعه B نگاشته شده است. به عبارت دیگر، f یک تابع از A به B است.

مثال: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که هر عدد x را به x^2 نگاشته است.

این تابع یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است. (مجموعه مقادیر $\mathbb{R}$)

به عبارت دیگر، f یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است که هر عدد x را به x^2 نگاشته است.

مثال: $y = x^2$ است.

تبدیل تابع f به A و B در فضا: $y = f(x)$ را در صورتی که x در A باشد، y در B خواهد بود.

① $f = \{ (x, f(x)) ; x \in A \}$

② $f = \{ (x, y) ; x \in A, y = f(x) \}$

③ $x \in A, f: x \mapsto f(x)$

حرف صاف فونیکال را در نظر بگیرید.

مثال: مجموعه $A = \{ -2, -1, 1, 2 \}$ و $y = x^2$ مفروض است.

الف) آیا f یک تابع است؟

ب) اگر f یک تابع است، بردار آن را مشخص کنید.

(4)

الفصل ۱

ص ۱۱

برای پاسخ به سوال اینک f یک تابع است ابتدا باید متوجه شویم که A را در ضابطه تابع

عوض می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 \rightarrow x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 = 4 \rightarrow (-2, 4)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 = 1 \rightarrow (-1, 1)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 = 1 \rightarrow (1, 1)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 = 4 \rightarrow (2, 4)$$

چون تابع در زوج مرتبه f دارای متغیرهای اول یک نیست پس f یک تابع است.

حال برای مشخص کردن دامنه و بردار استفاده از تعریف داریم: D : مجموعه تمام اعداد حقیقی که در دامنه قرار می‌گیرد و R : مجموعه تمام اعداد حقیقی که در بردار قرار می‌گیرد.

$$D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, R_f = \{0, 1, 4\}$$

مثال: مجموعه $\{x, y\}$ که در H قرار می‌گیرد. آیا H یک تابع است؟

پاسخ: به ضابطه ای که در سوال گفته شده متوجه می‌شویم که x را در H عیناً قرار می‌دهیم.

$$2y^2 = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 2y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 4 \Rightarrow 2y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2}$$

$$H = \{(0, 0), (1, \frac{\sqrt{2}}{2}), (1, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (4, \sqrt{2}), (4, -\sqrt{2})\}$$

H یک تابع نیست چون برای یک x در H متغیرهای اول یک نیستند.

5)

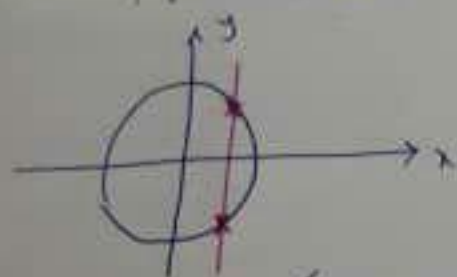
الف)

مسئله: با بری این که یک معادله بر حسب درستی x دایره ضابطه یک تابع است یا نه علاوه بر تعریف تابع اگر داشته باشیم که اگر هر خط عمودی با محور y دایره را حداکثر در یک نقطه قطع کند به آن دایره ضابطه یک تابع گفته می شود.

مثال: بررسی کنیم آیا معادله $x^2 + y^2 = 4$ دایره حقیقی ضابطه یک تابع است؟
حل:

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{4 - x^2}$$

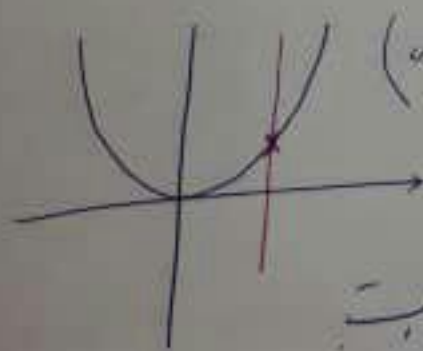
یعنی برای یک x دو مقدار برای y بدست می آید پس ضابطه یک تابع نیست، به تعبیر دیگر ای که در بالا گفتیم



اگر دایره معادله را رسم کنیم

و یک خط عمودی را رسم کنیم و آن را با دایره قطع می کنیم (به عنوان مثال) در نقطه قطع می کند پس تابع نیست. (به عبارت دیگر در هر نقطه قطع نمی کند)

و مثال دیگر را بررسی کنیم آیا معادله $y = x^2$ دایره حقیقی ضابطه یک تابع است؟



با رسم دایره $y = x^2$ (با رسم x عددی رسم می کنیم و به کمک آن رسم می کنیم)

و رسم یک خط عمودی را می بینیم که فقط در یک نقطه

بر می خورد پس ضابطه یک تابع است.

6

۱۱/۱۱

نکاتی در رابطه با تعیین دامنه تابع:

۱- دامنه توابع چند جمله‌ای:

" توابع چند جمله‌ای دارای دامنه $\mathbb{R}$ هستند. (یعنی مجموعه اعداد حقیقی)

توابع چند جمله‌ای در تمام $\mathbb{R}$ به صورت یک منحنی درآمده می‌شوند.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

مثال: دامنه تابع $y = 2x^2 + 4$ را تعیین کنید.

حل: تابع داده شده یک تابع چند جمله‌ای است پس دامنه آن برابر با $\mathbb{R}$ است.
 $D_f = \mathbb{R}$

حال اگر بخواهیم خطه ابتدای ترسیم کنیم در این مورد به این شکل برخورد می‌کنیم: به نقطه‌های تابع هر عددی را می‌توانیم به دست آوریم و یک جدول را به این صورت پر می‌کنیم:

$$y = 2x^2 + 4$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 6$$

$$\vdots$$

$$x = 100 \Rightarrow y = \dots$$

$$\vdots$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 6$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 12$$

$$\vdots$$

$$x = -100 \Rightarrow y = \dots$$

پس هر عدد حقیقی که قرار دهیم به دست می‌آید. حال مقدار x را به قدری بزرگ می‌کنیم که به نقطه‌های تابع برخورد می‌کنیم و واحد بر روی محور x عدد داده شده اثر می‌گذارد. اگر بخواهیم مجموعه‌ای که x را از آن انتخاب می‌کنیم اعداد حقیقی هستند. پس دامنه (اعداد x داریم) (یعنی اعداد حقیقی) $\mathbb{R}$ است.
 $D_f = \mathbb{R}$

⑦

① 2001

$$\therefore f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ problem-2}$$

دانشگاه کسری که همدت کردید همه ای و منجی که هم ای همه ای است : مزم از یقین

$$D_F = D_P \cap D_{q_L} - \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$$

پہلے $\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}$ کا تعین کریں۔

ابتدا دانه ضابطه را مشخص کنیم. بعد دانه خرج را مشخص کنیم.
دانه ای که در دارایی است که متعلق به خرج را مشخص می کنند باید که دانه خرج کنیم چون در
غرامت که تعریف شده متعلق به دارایی (بده) است.
پس دانه خرج را که دانه مشخص کنیم و در ذرات آنرا که دانه ضابطه را مشخص کنیم.

نہ بدستور خواندن این یاد آفراف و این توفیق کی سرانجام شد و شد و بسیار راحت و
نیل در عین قابل محاسبہ و ہم کمال حاصل و کسب و راه این قسمت :

جواب: دالة تابع $f = \frac{2x}{x^2 - 1}$ را به دست آورید.

حل: $\sin \theta = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \theta = 30^\circ$ $\Rightarrow \theta = 150^\circ$ $\Rightarrow \theta = 210^\circ$ $\Rightarrow \theta = 330^\circ$

① ابتدا دانشمند را به دست آوریم (تعیین کنید چه مقدار از همین دانشمند $\frac{1}{R}$) $\leftarrow$

② حال دانه مشخص (تست) / مشخص چند مجهول دانه R دارد $\leftarrow D_9 = R$

(3) حال بدیهه رسته های مخرج را بدست آورده و از آنجا که مخرج کم است

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$\text{Def} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{+1, -1\}$$

8

۱۴ فروردین

مثال: دامنه تابع $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ را تعیین کنید.

حل: دامنه عدست $\mathbb{R}$

دامنه خروج $\mathbb{R}$ (چون $x^2 + 1$ همواره بزرگتر از صفر است و به ازای هیچ مقدار حقیقی برابر صفر نیست و این کسر هیچ موقع تعریف نشده نخواهد بود)

نتیجه: $D_f = \mathbb{R}$

3- دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج:

برای تعیین دامنه توابع رادیکالی در مسئله فرجه رادیکال عدد زوجی باشد عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم. یعنی دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج برابر است با مجموعه مقادیری از x که به ازای آن عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر شود.

$$f(x) = \sqrt[2k]{g(x)} \Rightarrow D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$$

عبارت زیر رادیکال

حالا با هم چند مثال حل کنیم:

مثال: دامنه تابع $y = \sqrt[4]{x^2 - 1}$ را تعیین کنید.

حل: باید که لایم رادیکال است. زیرا آن 4 است. پس باید تعیین دامنه عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم.

$$y = \sqrt[4]{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

یعنی x ها بزرگتر یا مساوی 1 و x ها کوچکتر از -1 که مجموع اینها دامنه تابع را تشکیل می دهد.

⑨

① 841

مثال: دالة تابع $y = \sqrt{1-x}$ راسعین کسره

حل: (میدینج کا زینہ کا ایک کمال بدینج وضع کریمہ میں بائیں سے بائیں، دفعہ وار ایک کمال عدد 2 ہے)

$$y = \sqrt{1-x} \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

4 - داندہ - حاجی راجعلی باقرہ فر:

بجای تعین دایمہ تواج راہ کس به رضا فراد رضا را ایل راه الله کریم دلا شریعت زهر را ایل را
بهت مرادیم

حل: دامنه عبارت $y = \sqrt[3]{1-2x}$ را تعیین کنید

حل: فرض کنیم که مضرب را $2x$ و عدد فرد را 1 بنویسیم. پس مضرب کار را نداریم و در نتیجه عبارت زیر را می‌نویسیم:

$P_{2n} = 1 - 2x$ (دفعه ۱)
 $(1 - 2x)$ (دفعه ۲)

$f(x) = 1 - 2x$

مثال: دالة عبير $y = \sqrt{1-x^2}$ دالة من كلاس

$$D_f = \mathbb{R}$$

صل: زمرہ فرمائے۔ میں نے دیکھا ہے کہ یہ نیر و انوار کا ایک عالم ہے۔

$$P(x) = 1 - x^2 \longrightarrow \text{Curl } 2 \times 10^6$$

سید احمد علی شاہ

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

نیز که تعین بر توابع :

در تعریف برد تقسیم، بهیچ هم مقدار که x می تواند اختیار کند بر تابع f دلالت می کند به عبار
 R_f یعنی در هم

نیز که برای تعین بر توابع رسم نمودار تابع f که البته همیشه کار است نیست.
 در این قسمت که در روش خاصه با این تعین بر توابع بیان می کنیم
 برای مثال تابع $y = x^2$ را در نظر بگیریم و فرض کنیم بر R_f تعین کنیم.
 در این رسم که دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی است.

پس اگر به جای x قرار دهیم صفر و نیز هر عددی در $x=0 \Rightarrow y=0$

هر چند که صفر به سمت y است به ذاتی بدیم و اعداد کوچک هم چون x^2 و x توان 2 دارد

y هم عدد بزرگتر را می دهد پس
 $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

و از طرفی هر چند x اعداد کوچک را بگیرد و در ذاتی به سمت منفی به ذاتی برود چون x^2 و
 x توان 2 دارد y اعداد مثبت و بزرگتر را می دهد یعنی $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

مثال:

x	$-\infty$	$\dots$	0	$\dots$	$+\infty$
y	$+\infty$		0		$+\infty$

پس y مقدار $+\infty$ را می گیرد $\leftarrow R_y = [0, +\infty)$ به عبارت دیگر

- برد توابع چند جمله ای که درجه ۳ و ۴

(۱۱)

۱۱۰

در این تمرین با تعیین برد و دامنه با توابع چند جمله ای در قالب یک مسئله بیان می کنیم.

نکته: برد توابع چند جمله ای که درجه ۳ و ۴، مجموعه $\mathbb{R}$ است.

برای نشان دادن این نکته یک مثال را در نظر می گیریم.

مثال: برد تابع $y = x^3 + 1$ را تعیین کنید.

حل: چنانچه بخواهیم برد تابع را بیابیم، $\mathbb{R}$ است چرا؟ اول اینکه وقتی x را به هر عددی از $\mathbb{R}$ می دهیم، y به هر عددی از $\mathbb{R}$ می رسد.

دوم اینکه اگر x را به هر عددی از $\mathbb{R}$ می دهیم، y به هر عددی از $\mathbb{R}$ می رسد.

(درجه ۳ توابع چند جمله ای درجه ۳ و ۴ هستند)

پس جوابی که برد تابع $\mathbb{R}$ است.

حال بیایید چنانچه x را به هر عددی از $\mathbb{R}$ می دهیم، y به هر عددی از $\mathbb{R}$ می رسد، درست است یا نه؟

اگر x مقدار بی نهایت بزرگ و مقدار بی نهایت کوچک $+\infty$ و $-\infty$ بگیریم و مقدار y را بیابیم، داریم:

x	$+\infty$	$\dots$	-2	-1	0	1	2	$\dots$	$+\infty$
$y = x^3 + 1$	$+\infty$	$\dots$	-7	0	1	2	9	$\dots$	$+\infty$

پس به ازای هر عددی از $\mathbb{R}$ می توانیم x را بیابیم که y به هر عددی از $\mathbb{R}$ می رسد.

ایک رسم

برای توابع چند گانه آن که نام ریاضی

12

یا فصل 11

$$y = a_1 x^{2k} + a_2 x^{2k-2} + \dots + b$$

اگر تابع چند گانه باشد

برای تابع $(b, +\infty)$ خواهد بود.

مثال: برای تابع $y = x^4 + 2x^2 - 3$ را تعیین کنید.

حل: طبق نام برای تابع داده شده در $(-3, +\infty)$ و حالا باید انتخاب کنیم این تابع درست

باید به x مقدار دهیم و مقدار y را بدست آوریم:

$$x=0 \Rightarrow y=-3$$

$$x=1 \Rightarrow y=0$$

$$x=2 \Rightarrow y=21$$

⋮

$$x=-1 \Rightarrow y=0$$

$$x=-2 \Rightarrow y=21$$

⋮

$$\Rightarrow R_y = [-3, +\infty) \quad \checkmark$$

تعیین برای است که رسم نمودار:

یک راه دیگر برای تعیین برد به کمک نمودار تابع است. یک مثال که توضیح در رسم

مثال: برای تابع $y = x^2 + 2$ را تعیین کنید.

برای رسم نمودار تابع می‌توانیم به x مقدار دهیم و مقدار y حاصل شده را بدست آوریم و در یک مرتبه حاصل شده را در نمودار مشخص کنیم و به همین ترتیب این نقاط را در نمودار تابع رسم می‌کنیم.

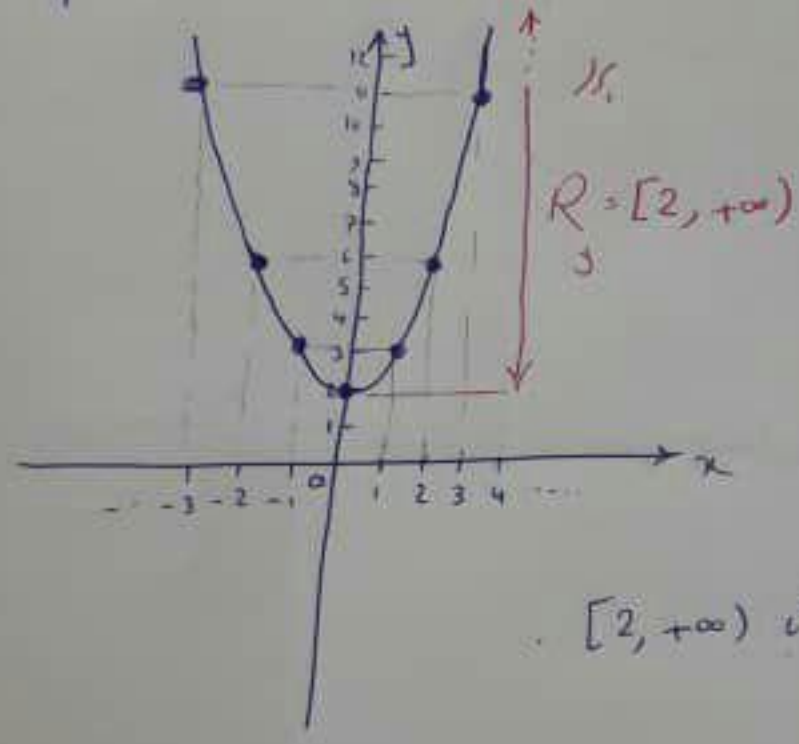
باید دقت مقدار x را در رسم باید که دامنه تابع انتخاب کنیم که دامنه تابع مقدار رسم تابع تعریف شده است.

13

1) $y \geq 2$

دایره R به مرکز $(0, 2)$ و شعاع 2 در x و y محورها قرار دارد. R به مرکز $(0, 2)$ و شعاع 2 در x و y محورها قرار دارد.

x	$-\infty$	$...$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$...$	$+\infty$
y	$+\infty$		11	6	3	2	3	6	11		$+\infty$



بازوی R به مرکز $(0, 2)$ و شعاع 2 در x و y محورها قرار دارد. R به مرکز $(0, 2)$ و شعاع 2 در x و y محورها قرار دارد.

14

تمرین 1

تمرین‌های زیر را حل کنید:

1- کلاس‌های زیر را به یک تابع تبدیل کنید؟ در صورت تابع بودن دامنه و بردار تابع را تعیین کنید.

1/ $A = \{(1, 3), (2, 5), (1, 7)\}$

2/ $B = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6), (4, 2)\}$

3/ $C = \{(x, y) : y = 2x + 1, x \in \mathbb{N}\}$

2- مجموعه A روابط f را دارد. f در صورت f یک تابع است؟ اگر آری، دامنه و بردار آن را مشخص کنید.

4/ $A = \{-3, -2, 0, 1, 3\}$, $f(x) = 4x - 3$

5/ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

6/ $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $x^2 + 3y^2 = 5$

3- آیا $f(x) = 5x^3 - 1$ در اعداد حقیقی خطی یک تابع است؟ در صورت تابع بودن دامنه و بردار f را تعیین کنید.

(۱۵) ۱) x^4

4- دانسته در توانج (الاشده) را بنویسید

1/ $f(x) = x^4 + x^2 + 3$

2/ $f(x) = x^8 + x^4 + 2$

3/ $f(x) = x^2 - 3x + 1$

4/ $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

5/ $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

6/ $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$

7/ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}}$

8/ $f(x) = \sqrt{x + 3}$

9/ $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

10/ $f(x) = \sqrt[7]{x^2 + 2x - 1}$

11/ $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{\sqrt[3]{7x - 1}}$